$\ddot{x}+f(x,\dot{x})\dot{x}+g(x)=0$の周期解の存在について (力学系の安定問題)

佐藤, 祐吉

数理解析研究所講究録
117巻 1971年 27-38

$\ddot{x} + f(x, \dot{x})\dot{x} + g(x) = 0$ の周期解の存在について.

埼大　理工　佐藤祐吉

§1　序

微分方程式

(1)　$$\ddot{x} + f(x, \dot{x})\dot{x} + g(x) = 0 \qquad (\dot{} = \tfrac{d}{dt})$$

の周期解の存在について考える。ここで $f(x, y)$ と $g(x)$ は, 次の条件を満足するものとする。

I)　$g(x)$ はリプシッツ条件を満たし,

$$g(x) < 0 \qquad \alpha < x < 0$$

$$g(x) > 0 \qquad x > 0 \quad 又は \quad \alpha > x$$

となる定数 $\alpha < 0$ が存在する。更に, $x = \alpha$, 0 で微分可能で, $g'(\alpha) < 0$, $g'(0) \geqq 0$.

II)　$f(x, y)$ は　リプシッツ条件を満たし

$$f(x, y) \geqq -M_0 \qquad \text{for all } (x, y)$$

$$f(x, y) > 0 \qquad x < \beta_2 \quad 又は \quad \beta_1 < x$$

ここで　β_1, β_2, M_0 は定数で, $\beta_2 < \beta_1$, $M_0 > 0$。

(1)と同値な方程式

$$\dot{x} = y$$

(2) $$\dot{y} = -f(x, y)y - g(x)$$

を考える。(2)の危点は(0,0)と$(\alpha, 0)$のみである。更に$f(0,0) > 0$ 又は $f(0,0) < 0$ に従って(0,0)は安定，又は，不安定な危点であり，その index は，+1である。

$(\alpha, 0)$ は saddle pt. であるので，index は −1である。よって周期解が存在したとすれば，それは(0,0)のみを内部に含まなければならぬ。

半平面：$\{\alpha \leqq x, -\infty < y < +\infty\}$ で $f(x, y) \geqq 0$ ならば，(1)の周期解が存在しないのは容易にわかる。$f(x, y) < 0$ の場合でも(1)の周期解が存在しない十分条件が得られる。即ち

$$\int_0^x g(x)\,dx \equiv G(x)$$

とおいて，

$\boxed{\text{定理 1.}}$ 次の(i)，(ii)をみたす定数 $\gamma_1 > 0$，$\gamma_2 < \alpha$ が存在するとき，(1)は周期解を持たない。

(i) $f(x, y) < 0$ $\quad \gamma_2 < x < \gamma_1$

(ii) $G(\gamma_1) \geqq G(\alpha)$ 又は

$G(x_1) = G(x_2)$，$\alpha < x_1 < 0$，$\gamma_1 < x_2$ ならば

$$\frac{g(x_1)}{f(x_1, y)} < \frac{g(x_2)}{f(x_2, y)}$$

$\boxed{\text{定理 2}}$ (i) $\beta_2 \leqq \alpha < \beta_1 < 0$

(ii) $G(x_1) = G(x_2)$, $\alpha \leqq x_1 < \beta_1$, $0 < x_2$ に対して

$$x_1 + x_2 > 2\beta_1$$

(iii) $f(\xi_1, y_1) + f(\xi_2, y_2) \geqq 2f\left(\frac{\xi_1+\xi_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2\theta}\right)$

となる $0<\theta$ が存在する。

(iv) 次のような連続函数 $\chi(y)$ が存在する.

$$\alpha < \chi(y) \leqq \beta_1, \quad \chi(y_1) + \chi(y_2) \leqq 2\chi\left(\frac{y_1+y_2}{2}\right),$$

$$\mathcal{D} = \{(x, y);\ \alpha < x < \chi(y)\}, \quad \mathcal{D}_+ = \{(x, y);\ \chi(y) < x\}$$

$$f(x, y) < 0 \qquad (x, y) \in \mathcal{D}$$

$$f(x, y) > 0 \qquad (x, y) \in \mathcal{D}_+.$$

このとき (1) の周期解は存在しない。

ここではこの証明は省約致します。

§2. 存在定理

$\boxed{\text{定理 3}}$ (i) $\alpha < \beta_2 < 0 < \beta_1$. (ii) $f(0, 0) < 0$

(iii) 次の不等式を満たす数 x_1, w が存在する.

$$\alpha < x_1 < \beta_2, \quad w > 1$$

(3) $$2w(1 + 1/\theta)M \leqq \int_{x_1}^{\beta_2} f(x, u(x))\,dx$$

(4) $$w^2\{G(\alpha) - G(x_1)\} \geqq G(\alpha) - G(\beta_1).$$

(iv) $\lim_{x\to\infty} G(x) > M + y_0$.

このとき (1) は少なくとも1つ周期解を持つ．ここで $u(x) \leqq 0$ は任意の単調減少連続函数．

$$y_0 = \sqrt{2}\{G(\alpha) - G(\beta_2)\}^{\frac{1}{2}}, \qquad M = M_0(\beta_1 - \beta_2) + G(\beta_2)/y_0$$

$$\theta = y_0/M$$

証明．我々は方程式 (2) とリャプノフ函数

(5) $$\lambda(x, y) = \frac{1}{2}y^2 + G(x)$$

を考える．(2) の解にそって t で微分すると

(6) $$\dot{\lambda}(x, y) = -y^2 f(x, y)$$

となる．

$f(0.0) < 0$ であるから．十分小さい $\varepsilon > 0$ に對して，$\lambda(x, y) = \varepsilon$ となる閉曲線は原点を内部に含む。又，(6) より，閉曲線内の原点以外の点を通る軌道は t が増加するとき閉曲線の外に出る．

次に点 $(\alpha, 0)$ は saddle pt. であるので，4つの separatrix がある．そのうちで，t が増加するとき，領域 $\Omega = \{x > \alpha, y > 0\}$ に入る separatrix を考え，それを $\Gamma_+ ; (x(t), y(t))$ で表わす。(6) より Γ_+ と半直線 $x = \beta_2$, $y > 0$ との交点を $P_1 = (\beta_2, y_1)$ とすると，$y_1 < y_0$ である。

Γ_+ が半直線 $x = \beta_1$, $y > 0$ と交わる場合を考える。Γ_+ と半直線との交点を $P_2(\beta_1, y_2)$ で表わすと

(7) $$y_2 < y_0 + M$$

を得る。実際

$$\varphi(x, y) = \begin{cases} -f(x, y) - g(x)/y_0 & \beta_2 \leqq x \leq 0 \\ -f(x, y) & 0 < x \leqq \beta_1 \end{cases}$$

とおき、微分方程式

(8) $$\frac{dY}{dx} = \varphi(x, Y)$$

で初期条件 $Y(\beta_2) = y_0$ を満足する解 $Y(x)$ と

$$\frac{dy}{dx} = -f(x, y) - \frac{g(x)}{y}$$

で初期値 $\hat{y}(\beta_2) = y_1$ を取る解 $\hat{y}(x)$ を比較すると

$$0 < \hat{y}(x) \leqq Y(x) \qquad \beta_2 \leqq x \leq \beta_1$$

となる。(8)を β_2 から β_1 まで積分する。

$$Y(\beta_1) - Y(\beta_2) = -\int_{\beta_2}^{\beta_1} f(x, Y(x)) - \int_{\beta_2}^{0} \frac{g(x)}{y_0}\, dx,$$

II) と M の定義より

$$Y(\beta_1) - y_0 \leqq M.$$

となる、

$$\dot{\lambda} = -y^2 f(x, y) < 0 \quad \text{for } \beta_1 < x$$

であるから、Γ_+ は曲線 $\lambda(x, y) = y_0 + M$, $\beta_1 < x$, とは交わらないので、必ず、半直線 $x = \beta_1$, $y < 0$ と交わる。

その交点を $P_3=(\beta_1, y_3)$ とすると、(17) より

$$|y_3| < y_0 + M .$$

Γ_+ が半直線 $x=x_1,\ y<0$ と交わると仮定する．点 $P_4=(\beta_2, y_4)$，$P_5=(x_1, y_5)$ はそれぞれ Γ_+ と $x=\beta_2,\ y<0$ と $x=x_1,\ y<0$ との交点とする．

P_1 から P_2 までと同様な論法で

(19) $$|y_4| < y_0 + 2M$$

を得る。

$d\lambda/dx = -y f(x, y)$ を P_4 から P_5 まで積分する．

$$\lambda(P_5) - \lambda(P_4) = -\int_{\beta_2}^{x_1} y f(x, y)\, dx$$

$$= -\int_{x_1}^{\beta_2} |y| f(x, y)\, dx .$$

若し $\widehat{P_4 P_5}$ 上で 常に $|y| \geq \frac{1}{w} y_0$ であると (3) より

$$\lambda(P_5) - \lambda(P_4) < -\frac{1}{w} y_0 \int_{x_1}^{\beta_2} f(x, y)\, dx$$

$$\leq -2 y_0 M (1 + 1/\theta)$$

(19) より

$$\lambda(P_5) < \frac{1}{2}(y_0 + 2M)^2 + G(\beta_2) - 2 y_0 M (1 + 1/\theta)$$
$$= \frac{1}{2} y_0^2 + G(\beta_2) + 2M(y_0 + M) - 2 y_0 M (1 + 1/\theta)$$
$$= G(\alpha)$$

$\widehat{P_4P_5}$上で $|y|<\frac{1}{w}y_0$ なる場合があるときは，$y<0$，$\alpha<x<\beta_2$ で $\dot{y}(t)>0$ であるから，$|y_5|<\frac{1}{w}y_0$ である．したがって，(4) より

$$\lambda(P_6)<\frac{1}{2}\left(\frac{1}{w}y_0\right)^2+G(x_1)$$
$$\leqq G(\alpha)$$

$\lambda(x,y)$ はΓ_+にそって $\beta_2>x$ では減少であるから，Γ_+は α と x_1 の間で x 軸と交わらねばならぬ．

Γ_+が $x=x_1$ を交わらぬ場合は，x_1 と 0 との間に交わる。

最后に $x=\beta_1$ と交わらぬ場合は，$P_3=(\beta_1,0)$として同様な議論をすればよい。

いずれの場合でも Poincaré-Bendixson の定理「少なくとも１つ閉軌道が存在する」の条件を満足する領域を定めることが出来る。

§3．周期解の一意性に関して．

ここでは周期解の一意性に対する十分条件を与える．即ち

$\boxed{\text{定理4}}$ $f(x,y)$，$g(x)$ は連続微分可能と仮定する。更に

(i) $x_1(y)>x_2(y)$ 一価連続函数で，$0<\gamma_1\leqq x_1(y)\leqq\beta_1$

$$x_1(y_1)+x_1(y_2)\geqq 2x_1\left(\frac{y_1+y_2}{2}\right),\qquad x_1(y)=x_1(-y).$$

更に $\qquad G(x_1(y))=G(x_2(y))$

(ii) $\mathcal{D}=\{(x,y);\ \chi_2(y)<x<\chi_1(y)\}$

$$f(x,y)<0 \qquad (x,y)\in\mathcal{D}$$

$$f(x,y)>0 \qquad (x,y)\notin\bar{\mathcal{D}} \quad \text{closure of } \mathcal{D}$$

(iii) $$y\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\geqq 0 \qquad \{(x,y);\ \alpha<x,\ |y|\leqq y_0+2M\}$$

このとき，(1) は高々 1 つの定数でない周期解を持つ。

証明．やはり (1) の代りに (2) を考える．(2) の任意の閉軌道を Γ とする。$\Gamma\notin\mathcal{D}$ であり，又．Γ が直線 $x=\alpha$ と交わらないことは trivial である。

今．$\Gamma<\mathcal{D}\cup\mathcal{D}_+$ と仮定して矛盾を導き出す。ここで

$$\mathcal{D}_+=\{(x,y);\ x\geqq\chi_1(y)\}$$
$$\mathcal{D}_-=\{(x,y);\ \alpha<x\leqq\chi_2(y)\}$$

とおく．

Γ と $\chi_1(y)$ との交点を $A=(x_a.\ y_a)$ $(y_a>0)$，$B=(x_b.\ y_b)$ とする．$\lambda(x,y)$ は Γ にそって $\mathcal{D}$ 内では単調増加(t；増加)であり，$\mathcal{D}_+$ では単調減少である．

$\mathcal{D}$ 内にある Γ に対応して．(λ,y) 平面上の曲線 $y=y_I(\lambda)$ $\mathcal{D}_2$ 内にある Γ を $(\lambda.y)$ 平面上に移し．$y_{II}(\lambda)$ で表わす。

$$\lim_{\lambda\to\lambda(A)}\frac{d\,y_I(\lambda)}{d\lambda}=\frac{1}{y_I(\lambda)}+\frac{y(x)}{y_I(\lambda)^2 f(x,y_I)}=-\infty$$

$$\lim_{\lambda\to\lambda(B)}\frac{dy_I}{d\lambda}=-\infty,\quad \lim_{\lambda\to\lambda(A)}\frac{dy_{II}}{d\lambda}=+\infty,\quad \lim_{\lambda\to\lambda(B)}\frac{dy_{II}}{d\lambda}=+\infty$$

であり，又，

$$y_I(\lambda(A)) = y_{II}(\lambda(A))$$

であるから，λ が $\lambda(A)$（または $\lambda(B)$）の十分近くでは

$$y_I(\lambda) > y_{II}(\lambda) \quad (\text{または} \quad y_I(\lambda) < y_{II}(\lambda))$$

となる．$y_I(\lambda)$，$y_{II}(\lambda)$ は連続であるから，$\lambda(B) < \lambda < \lambda(A)$ で必ず $y_I(\lambda) = y_{II}(\lambda)$ となる．今

$$\lambda_1 = \max\{\lambda;\ y_I(\lambda) = y_{II}(\lambda),\ \lambda < \lambda(A)\}$$

とおき，λ_1 に対応する Γ 上の点を (x_1, y_1) (x_2, y_2) すなわち $\lambda_1 = \lambda(x_1, y_1) = \lambda(x_2, y_2)$，$(x_1, y_1) \in \mathcal{D}$ とする．

$y_1 = y_I(\lambda_1) = y_2$ より

$$G(x_1) = G(x_2) \qquad \alpha < x_1 < x_1(y_1) < x_2$$

である．一方 $G(x)$ は $\alpha \leqq x$ で単調増加函数であるので

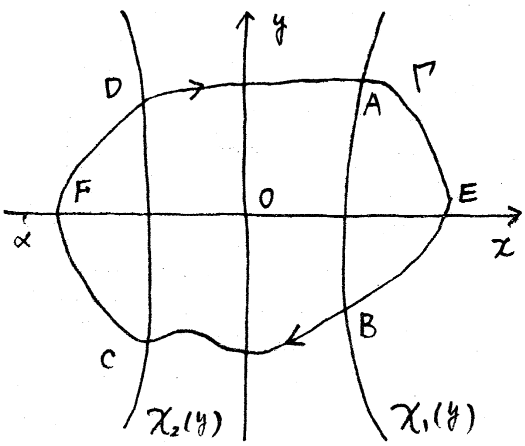
$$G(x_1) < G(x_1(y_1)) < G(x_2)$$

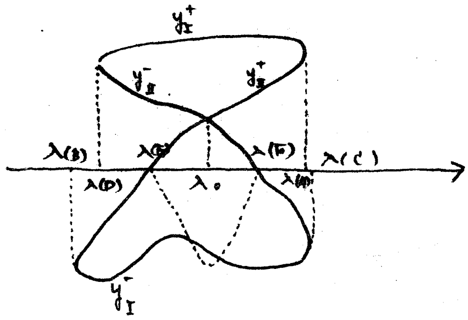
となり矛盾である．

$\Gamma \not\subset \mathcal{D} \cup \mathcal{D}_-$ であることも同様に示される．

故に Γ は曲線 $x_1(y)$，$x_2(y)$ と必ず交わらねばならぬ．更に条件(i)より $x_1(y)$ とは2点 $A=(x_1(\eta_+), \eta_+)$ $(\eta>0)$，$B=(x_1(\zeta_-), \zeta_-)$ $(\zeta_- < 0)$ で交わり，$x_2(y)$ とは $C=(x_2(\eta_-), \eta_-)$ $(\eta_- < 0)$ $D=(x_2(\zeta_+), \zeta_+)$ $(\zeta_+ > 0)$ で交わる．

Γ上の AB, BC, CD, DA に対応する $\lambda \cdot y$ 面上の曲線をそれぞれ $y_0^+(\lambda)$, $y_I^-(\lambda)$, $y_{II}^-(\lambda)$, $y_I^+(\lambda)$ とする。





前と同様な論法で $\lambda = \lambda(A)$, $\lambda(B)$ を除いて $y_{II}^+(\lambda)$ は $y_I^+(\lambda)$, $y_I^-(\lambda)$ とは交わらぬ。y_{II}^- は $\lambda = \lambda(C)$, $\lambda(D)$ を除いて y_I^+, y_I^- と交わらぬ. 故に $y_{II}^+(\lambda)$ と $y_{II}^-(\lambda)$ は交わらなければならぬ. (実は一点で) その交点を λ_0 とする.

図のように Γ と x 軸との交点を E, F とする.

今 $\lambda(F) = \lambda(E) = \lambda_0$ の場合は不等式

$$(10) \quad \begin{cases} |y_{II}^+(\lambda)| \leqq y_I^+(\lambda) & \lambda_0 \leqq \lambda \leqq \lambda(A) \\ |y_{II}^-(\lambda)| \leqq y_I^+(\lambda) & \lambda(D) \leqq \lambda < \lambda_0 \end{cases}$$

と

$$(11) \quad \begin{cases} |y_{II}^+(\lambda)| \leqq |y_I^-(\lambda)| & \lambda(B) \leqq \lambda \leqq \lambda_0 \\ |y_{II}^-(\lambda)| \leqq |y_I^-(\lambda)| & \lambda_0 \leqq \lambda \leqq \lambda(C) \end{cases}$$

が成り立つ.

$\lambda(E) \neq \lambda(F)$ の場合でも (10), (11) が成り立つことを示

す。一般性を失うことなく，$\lambda(E) < \lambda(F)$ と仮定する。

したがって $y_{II}^{+}(\lambda_0) = y_{0}^{-}(\lambda_0) > 0$ である。よって不等式

(10) は成り立つ．

(11) が成り立たないと仮定して矛盾を導き出す．

$y_I^-(\lambda)$ は $y_0^+(\lambda)$, $y_{II}^-(\lambda)$ と交わらないので (11) が成り立たないのは次のような λ_I が存在することである。

(12) $$0 < |y_I^-(\lambda_1)| < y_{II}^+(\lambda_1) \qquad \lambda(E) < \lambda_1 < \lambda_0$$

又は

(12)′ $$0 < |y_I^-(\lambda_1)| < y_0^-(\lambda_1) \qquad \lambda_0 < \lambda_1 < \lambda(F).$$

(12) の場合を考える。$y_0^+(\lambda(E)) = 0 < |y_I^-(\lambda(E))|$ であるから

$y_{II}^+(\lambda_0) = |y_I^-(\lambda_0)|$ $\lambda(E) < \lambda_0 < \lambda_1$ なる点 λ_0 が存在する．

λ_0 に対応する Γ 上の点を $(x_1, y_1) \in \mathcal{D}$, $(x_2, y_2) \in \mathcal{D}_+$ とする．$|y_1| = y_I^+(\lambda_0) = y_2$ と

$$\lambda_0 = \lambda(x_1, y_1) = \lambda(x_2, y_2)$$

より

$$G(x_1) = G(x_2) \qquad x_0(y_1) < x_1 < X_1(y_1),\ X_1(y_2) < x_2$$

条件(i)より $G(x_1) < G(X_1(y_1)) = G(X_1(-y_1)) < G(x_2)$ これは上の等式に矛盾である．

(12)′ の場合も全く同様である．故にいずれの場合でも不等式は成り立つ．

閉軌道 Γ; $(x(t), y(t))$ の周期を T とすれば

$$\int_0^T \left\{ f(x(t), y(t)) + y(t)\frac{\partial f(x(t), y(t))}{\partial y} \right\} dt$$

$$\geqq \int_0^T f(x(t), y(t))\,dt = \left(\int_a^b + \int_b^c + \int_c^d + \int_d^a\right)\left(f(x, y)\frac{dt}{d\lambda}\right) d\lambda$$

$$= -\left\{\int_a^b \frac{d\lambda}{y_{II}^+(\lambda)^2} + \int_b^c \frac{d\lambda}{y_I^-(\lambda)^2} + \int_c^d \frac{d\lambda}{y_{II}^-(\lambda)^2} + \int_d^a \frac{d\lambda}{y_I^+(\lambda)^2}\right\}$$

$$= \left(\int_b^{\lambda_0} + \int_{\lambda_0}^a\right)\left(\frac{1}{y_{II}^+}\right)^2 d\lambda + \left(\int_d^{\lambda_0} + \int_{\lambda_0}^c\right)\left(\frac{1}{y_{II}^-}\right)^2 d\lambda$$

$$- \left(\int_d^{\lambda_0} + \int_{\lambda_0}^a\right)\left(\frac{1}{y_I^+}\right)^2 d\lambda - \left(\int_b^{\lambda_0} + \int_{\lambda_0}^c\right)\left(\frac{1}{y_I^-}\right)^2 d\lambda$$

$$> 0$$

ここで $a = \lambda(A), \ldots\ldots\ d = \lambda(D)$ であり，最后の不等式は (10) (11) による．

Poincaré の判定法によって Γ は漸近軌道安定である．Γ は任意であったので，閉軌道が存在すればただ一つしかないことになる．